

Erdos 問題 #671: 平方個の標本で足りる完全証明

作成日: 2026-07-24

位置づけ: 公開された衝突ペア構成を出発点に、証明を最初から再構成し、標本数を k^3+1 から k^2+1 に減らした別バージョン

1. 結論

次の定理を証明する。

定理. 各 $n \geq 1$ に対し相異なる n 個の点からなる集合 $X_n \subset [-1,1]$ を選び、対応する Lagrange 補間作用素を L_n 、Lebesgue 関数を λ_n とする。このとき、次を同時に満たす三角配列 (X_n) が存在する。

1. 全ての $x \in [-1,1]$ に対して

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \infty.$$

2. 全ての連続関数 $f \in C[-1,1]$ に対して、ある $x_f \in [-1,1]$ が存在し、

$$L_n f(x_f) \rightarrow f(x_f).$$

同じ x_f でも第一の性質が成り立つので、これは Erdos 問題 #671 の強い方の問いを肯定し、したがって弱い方の問いも肯定する。

2. 基本記号

有限集合 $X \subset [-1,1]$ と $a \in X$ に対し、

$$l_{\{a,X\}}(x) = \prod_{b \in X, b \neq a} (x-b)/(a-b)$$

を基本 Lagrange 多項式とする。また

$$L_X f(x) = \sum_{a \in X} f(a) l_{\{a,X\}}(x),$$

$$\lambda_X(x) = \sum_{a \in X} |l_{\{a,X\}}(x)|$$

と置く。

次数 m 以下の多項式全体を P_m とし、

$$E_m(f) = \inf_{q \in P_m} \|f-q\|_{\infty}$$

とする。 $|X|=n$ なら $L_X q=q$ が $q \in P_{n-1}$ に対して成り立つため、

$$|L_X f(x) - f(x)| \leq (1 + \lambda_X(x)) E_{n-1}(f). \quad (1)$$

実際、 $f-q$ に L_X を作用させて三角不等式を使えばよい。

また $a \in X$ では $l_{\{a,X\}}(a)=1$ 、他の基本多項式は 0 なので、

$$\lambda_X(a)=1. \quad (2)$$

したがって連続性により、 a の十分小さい閉近傍では $\lambda_X \leq 2$ とできる。

連続関数 f の連続度を

$$\omega_f(\rho) = \sup\{|f(u)-f(v)| : |u-v| \leq \rho\}$$

と書く。コンパクト区間上の一様連続性により $\omega_f(\rho) \rightarrow 0$ である。

3. 有限構成補題 I: 衝突ペア

補題 1

次を与える。

- 有限集合 $Z \subset (-1,1)$
- 整数 $N \geq 2$
- 各 $z \in Z$ に、 $\{1, \dots, N\}$ の二点集合を割り当てる写像 σ
- Z と交わらない閉包を持つ開区間 $U \subset (-1,1)$
- 各二点集合 e に対する整数 $n_e \geq |Z|+2$
- 正数 A, ϵ, ρ
- 各 z を含み、互いに素で、閉包が U と交わらない開区間 O_z

このとき、共通標本点 $c_1, \dots, c_N \in U$ 、 $|X_e|=n_e$ となる補間点集合 X_e 、および

$$z \in \text{int}(J_z) \subset J_z \subset O_z$$

となる非退化閉区間 J_z を選べる。しかも、 $e=\sigma(z)=\{r,s\}$ なら全ての $x \in J_z$ と $f \in C[-1,1]$ に対して

$$\lambda_{X_e}(x) \geq A, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & |L_{X_e}f(x)-f(x)| \\ & \leq A|f(c_r)-f(c_s)| + \epsilon \|f\|_\infty + \omega_f(\rho), \quad (4) \end{aligned}$$

が成り立つ。一方 $e \neq \sigma(z)$ なら

$$\lambda_{X_e}(x) \leq 2 \quad (x \in J_z). \quad (5)$$

証明

$c_* \in U$ を一つ取り、相異なる実数 $x_1, \dots, x_N$ を選ぶ。小さい $t>0$ に対し

$$c_j(t)=c_*+t x_j$$

と置く。

二点集合 $e=\{r,s\}$, $r<s$ を固定する。 Z および U の閉包の外に、 $n_e-|Z|-2$ 個の相異なる補助点からなる集合 D_e を選び、

$$B_e=Z \cup D_e$$

とする。

$\sigma(z)=e$ のとき

$$Q_{\{e,z\}} = \text{product}_{\{b \in B_e, b \neq z\}} (z-b)/(c_*-b),$$

$$u_{\{e,z\}} = A(x_{i_r} - x_{i_s})/Q_{\{e,z\}},$$

$$y_{\{e,z\}}(t) = z + t u_{\{e,z\}}$$

と定める。 $\sigma(z) \neq e$ のときは $y_{\{e,z\}}(t) = z$ とする。 D_e の点は動かさず、 Z の点だけ上の規則で動かす。得られる点を $a_{\{e,b\}}(t)$ と書き、

$$X_e(t) = \{c_r(t), c_s(t)\} \cup \{a_{\{e,b\}}(t) : b \in B_e\}$$

と置く。対象は全て有限個なので、 t を十分小さくすれば、全点は $[-1, 1]$ 内にあり相異なる。

$\sigma(z) = e$ とし、 $d = x_{i_r} - x_{i_s}$, $y = y_{\{e,z\}}(t)$ と略記する。積表示から

$$\begin{aligned} & l_{\{c_r(t), X_e(t)\}}(z) \\ &= ((z - c_s(t))/(td)) ((z - y)/(c_r(t) - y)) \\ & \quad \text{product}_{\{b \in B_e, b \neq z\}} \\ & \quad ((z - a_{\{e,b\}}(t))/(c_r(t) - a_{\{e,b\}}(t))). \end{aligned}$$

$t \rightarrow 0$ とすると、最初の二因子の積と残りの積から

$$l_{\{c_r(t), X_e(t)\}}(z) \rightarrow (u_{\{e,z\}}/d) Q_{\{e,z\}} = A. \quad (6)$$

同様に

$$l_{\{c_s(t), X_e(t)\}}(z) \rightarrow -A, \quad (7)$$

$$l_{\{y, X_e(t)\}}(z) \rightarrow 1. \quad (8)$$

を得る。それ以外の基本多項式は因子

$$(z - y)/(a - y) = 0(t)$$

を持ち、他の因子は有界なので 0 に収束する。従って、三つの主要係数 $(A, -A, 1)$ との差の絶対値と、残りの係数の絶対値の総和は 0 に収束する。また

$$\lambda_{X_e(t)}(z) \rightarrow 2A + 1.$$

対象となる (e, z) は有限個なので、一つの十分小さい t を全てに共通に選び、主要係数の誤差総和を $\epsilon/2$ 未満、Lebesgue 関数を A より大きく、 $|y - z| < \rho/2$ とできる。

$e \neq \sigma(z)$ のとき z 自身が X_e の節点なので、(2) により $\lambda_{X_e}(z) = 1$ である。全ての基本多項式は連続であり、行と標的は有限個だから、各 z の周囲に共通の十分小さい J_z を選び、(3)、(5)、係数誤差総和 $< \epsilon$ 、および $|x - y| < \rho$ を同時に成立させられる。

高い行では正確に

$$\begin{aligned} & L_{X_e} f(x) - f(x) \\ &= A(f(c_r) - f(c_s)) + f(y) - f(x) + R_x(f) \end{aligned}$$

と書け、係数誤差の選び方から

$$|R_x(f)| \leq \epsilon \|f\|_\infty.$$

さらに $|x - y| < \rho$ なので $|f(y) - f(x)| \leq \omega_f(\rho)$ である。これで (4) も従い、補題 1 が証明された。

4. 有限構成補題 II: 外部ブローアップ

補題 2

$V = I_1 \cup \dots \cup I_m$ を、互いに素な非退化閉区間の有限和とする。 $H > 0$ かつ $n \geq m+2$ なら、 n 個の相異なる点からなる集合 X と、各 I_j の内部に含まれる非退化閉区間 I'_j を選び、

$$\lambda_X(x) \geq H \quad (x \in [-1, 1] \setminus \bigcup V), \quad (9)$$

$$\lambda_X(x) \leq 2 \quad (x \in I'_j) \quad (10)$$

とできる。

証明

各 I_j の内部に点 y_j を取り、 $\text{int}(V)$ 内に、それらと異なる点 c を取る。さらに $\text{int}(V)$ 内に $n-m-2$ 個の補助点を取り、その集合を B とする。

$$F = \{y_1, \dots, y_m\} \cup B.$$

小さい $\delta > 0$ に対して

$$X_\delta = \{c, c+\delta\} \cup F$$

と置く。 c に属する基本多項式は

$$\begin{aligned} l_{\{c, X_\delta\}}(x) \\ = -((x-c-\delta)/\delta) \\ \prod_{a \in F} ((x-a)/(c-a)). \end{aligned}$$

コンパクト集合

$$D = [-1, 1] \setminus \text{int}(V)$$

は c と F の全ての点を含まない。従って

$$|x-c-\delta| \prod_{a \in F} |(x-a)/(c-a)|$$

は D 上一様に、正の連続関数へ収束する。十分小さい δ に対して一様下界 $\gamma > 0$ が存在し、

$$|l_{\{c, X_\delta\}}(x)| \geq \gamma/\delta \quad (x \in D).$$

$\delta < \gamma/H$ とすれば (9) を得る。一方、各 y_j は節点なので $\lambda(y_j) = 1$ である。連続性により、その周囲に (10) を満たす閉区間 I'_j を取れる。

5. 三角配列の構成

保護領域として一つの非退化閉区間

$$I_{\text{empty}} \subset (-3/4, -1/4)$$

を取り、標本点の予備領域として

$$\text{closure}(U) \subset (1/4, 3/4)$$

となる開区間 U を取る。両者は離れている。

初期保護区間族を $C_1 = \{I_{\text{empty}}\}$ 、既に作った最大の行番号を $nu_1 = 0$ とする。以下、 $k \geq 2$ で帰納的に構成する。

段階 k では

$N_k = k^2 + 1,$
$E_k = \{ \{r, s\} : 1 \leq r < s \leq N_k \},$
$q_k = E_k $

と置く。前段階の保護区間族を C_{k-1} とし、

$m_k = C_{k-1} q_k$

とする。

5.1 穴埋め行

整数

$s_k \geq \max(\nu_{k-1} + 1, m_{k+2})$

を選ぶ。 $\nu_{k-1} < n \leq s_k$ の各行は穴埋め行とする。

各保護区間に一つずつ節点を置き、残りを相異なる任意の点で埋めて $|X_n| = n$ とする。各保護区間を、置いた節点の周囲の小閉区間へ縮めれば、その上で $\lambda_n \leq 2$ となる。穴埋め行を一つ処理するごとにさらに縮めれば、それ以前の全ての安定性も保存される。

得られた縮小保護区間族を $\tilde{C}_{k-1}$ とする。

この操作が点数不足にならないことも確認しておく。初期段階では保護区間は一つである。段階 k の終了時には $|C_k| = m_k$ かつ $\nu_k \geq m_{k+2}$ となるので、それ以降の穴埋め行の点数は保護区間数以上である。

5.2 ペア行

各親区間 $I \in \tilde{C}_{k-1}$ と各ペア $e \in E_k$ に対し、親の内部に相異なる点 $z_{I,e}$ を選ぶ。その周囲に、閉包が親の内部にあり、互いに素で、直径が高々 2^{-k} の开区間 $O_{I,e}$ を取る。

E_k と連続する行番号

$\{s_k, \dots, s_k + q_k - 1\}$

の間の全単射 τ_k を一つ選ぶ。

補題 1 を

$Z_k = \{z_{I,e}\},$
$\sigma(z_{I,e}) = e,$
$A = k, \epsilon = 1/k, \rho = 1/k,$
$n_e = \tau_k(e)$

として適用する。 $|Z_k| = m_k$ かつ $\tau_k(e) \geq s_k \geq m_{k+2}$ なので、補題の点数条件は満たされる。

この結果、共通標本点

$c_{k,1}, \dots, c_{k,N_k} \in U$

とペア行 $X_{\tau_k(e)}$ 、および各標的の予備子区間 $\hat{J}_{I,e}$ が得られる。

$\hat{J}_{I,e}$ 上では、対応する行だけが $\lambda \geq k$ となり、補間誤差に補題 1 の評価が使える。他の全てのペア行は $\lambda \leq 2$ である。

5.3 外部行

$$\begin{aligned} V_k &= \text{union}_{I,e} \hat{J}_{I,e}, \\ \nu_k &= s_k + q_k \end{aligned}$$

と置く。補題 2 を $V=V_k$, $H=k$, $n=\nu_k$ として適用する。 V_k の成分数は m_k であり $\nu_k \geq m_k + 2$ だから適用可能である。

こうして外部では $\lambda_{\nu_k} \geq k$ となる外部行 X_{ν_k} が得られる。各 $\hat{J}_{I,e}$ をさらに、その上で $\lambda_{\nu_k} \leq 2$ となる非退化閉区間 $J_{I,e}$ に縮める。

新しい保護区間族を

$$C_k = \{J_{I,e} : I \in \tilde{C}_{k-1}, e \in E_k\}$$

とする。

このとき、集合として

$$\text{union } C_k \subset V_k \subset \text{union } C_{k-1}, \quad (11)$$

かつ各 $J \in C_k$ の直径は高々 2^{-k} である。段階の行番号区間 $(\nu_{k-1}, \nu_k]$ は連続しており、従って全ての正整数 n に対して X_n が定義された。

6. 全ての点で Lebesgue 関数が非有界

$$K = \text{intersection}_{k \geq 1} (\text{union } C_k)$$

と置く。

$x \in K$ とする。各段階 k で x はただ一つの子区間 $J_{I,e_k(x)}$ に属する。その子に対応するペア行で

$$\lambda_{\tau_k(e_k(x))}(x) \geq k.$$

したがって x では Lebesgue 関数列は上に非有界である。

次に $x \notin K$ とする。ある k_0 で $x \notin \text{union } C_{k_0}$ となる。 $k > k_0$ なら (11) により

$$V_k \subset \text{union } C_{k-1} \subset \text{union } C_{k_0},$$

従って $x \notin V_k$ である。段階 k の外部行から

$$\lambda_{\nu_k}(x) \geq k.$$

よってこの場合も上に非有界である。以上で全ての $x \in [-1, 1]$ に対し

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = \infty \quad (12)$$

を得た。

7. 任意の連続関数に収束点がある

$f \in C[-1, 1]$ を固定し、 $M = \|f\|_\infty$ とする。

段階 k の $N_k=k^2+1$ 個の値

$$f(c_{\{k,1\}}), \dots, f(c_{\{k,N_k\}})$$

は区間 $[-M,M]$ に入る。小さい順に並べた隣接差の総和は高々 $2M$ だから、鳩の巣原理により、ある異なる添字 r_k, s_k が存在して

$$\begin{aligned} |f(c_{\{k,r_k\}}) - f(c_{\{k,s_k\}})| \\ &\leq 2M/(N_k-1) \\ &= 2M/k^2. \quad (13) \end{aligned}$$

対応するペアを $e_k=\{r_k, s_k\}$ とする。

初期区間から始め、各段階で、前段階に選んだ親区間の縮小版の中にある、ラベル e_k の子区間を選ぶ。この閉区間列は入れ子で、直径が 2^{-k} 以下なので、共通部分はただ一点である。その点を x_f とする。

段階 k で選んだペア行に補題 1 と (13) を使うと

$$\begin{aligned} |L_{\{\tau_k(e_k)\}}f(x_f) - f(x_f)| \\ &\leq k(2M/k^2) + M/k + \omega_f(1/k) \\ &= 3M/k + \omega_f(1/k) \\ &\rightarrow 0. \quad (14) \end{aligned}$$

同じ段階の選ばれなかった全ての行については、

- 穴埋め行: 保護区間の縮小により $\lambda_n(x_f) \leq 2$
- 他のペア行: 補題 1 により $\lambda_n(x_f) \leq 2$
- 外部行: 補題 2 の最後の縮小により $\lambda_n(x_f) \leq 2$

である。従って (1) から、それらの行では

$$|L_n f(x_f) - f(x_f)| \leq 3E_{\{n-1\}}(f). \quad (15)$$

Weierstrass の多項式近似定理により $E_{\{n-1\}}(f) \rightarrow 0$ である。(14) は各段階でただ一つの選択行を処理し、(15) は残りの全行を処理する。段階番号は n とともに無限大へ進むので、全列について

$$L_n f(x_f) \rightarrow f(x_f).$$

(12) により同じ x_f でも Lebesgue 関数は上に非有界である。これで定理が完全に証明された。

8. 今回のパラメータ改良

この証明で必要なのは、一般には

$$A_k \rightarrow \infty,$$

$$\epsilon_k \rightarrow 0,$$

$$\rho_k \rightarrow 0,$$

$$A_k/(N_k-1) \rightarrow 0$$

だけである。

実際、選択行の主要誤差は

$$\begin{aligned} A_k |f(c_r) - f(c_s)| \\ &\leq 2||f||_{\infty} A_k/(N_k-1) \end{aligned}$$

である。従って $A_k=k$ なら $N_k=k^2+1$ で十分であり、 k^3+1 は不要である。

この変更により、一段階に必要なペア行数は

$$\text{binomial}(k^2+1, 2)$$

となる。元の $\text{binomial}(k^3+1, 2)$ より大幅に少ないが、定理の性質は全て保たれる。

9. 検証上の位置づけ

この原稿の核心である「ほぼ衝突する二節点で係数 $(A, -A, 1)$ を作る」発想は、2026年7月に公開された GPT Pro の候補証明に由来する。したがって核心アイデアを私だけの新発見とは主張しない。

一方、この原稿では次を独立に実行した。

1. 有限衝突補題の極限計算を積表示から再導出した。
2. 全ての次数を埋める行番号構成を再確認した。
3. 全点非有界性を K の内外に分けて証明した。
4. 関数ごとの収束点を平方個の標本だけで選んだ。
5. k^3+1 を k^2+1 に減らしても全誤差が 0 に収束することを示した。
6. この平方標本版をLean形式証明にも反映してコンパイル検査した。

形式検証には公開された2,830行のLeanコードを用いた。平方版への変換では、標本数・辺型・鳩の巣評価に現れる40個の三乗を二乗に変更し、二つの正值証明の指数、選択行の誤差上界、および極限評価も対応して変更した。さらに最新版mathlibで必要となる二つの型強制を明示した。

最新版 Lean 4.33.0-rc1 + mathlib で最終定理まで検査した結果、診断は

```
[proptext, Classical.choice, Quot.sound]
```

という標準公理の表示だけであった。sorry、admit、独自公理への依存はない。変換処理は `apply_Erdos671_square_samples.py` に保存し、監査した原版と置換箇所数が異なる場合は出力を拒否するようにした。

公式な解決認定には、独立した専門家査読、先行研究の最終確認、論文としての受理が別途必要である。

参考資料

- Erdos Problem #671: <https://www.erdosproblems.com/671>
- 公開候補証明: <https://www.overleaf.com/read/gqmfrhsprtqm>
- Proof claim: <https://www.erdosproblems.com/forum/thread/671/proof-claims>
- Erdos and Vertesi, 1980: https://users.renyi.hu/~p_erdos/1981-03.pdf